

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 630*561+519.622

doi: 10.26907/2542-064X.2024.4.704-723

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ЗАПАСЕННОГО УГЛЕРОДА В ЛЕСНОМ СООБЩЕСТВЕ

Ш.Х. Зарипов, Д.А. Тарасова, М.В. Кожевникова, Е.А. Костерина
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

На основе математической модели роста одиночного дерева JABOWA создана программа расчета запасенного углерода надземной биомассы в лесном сообществе из различных видов деревьев. В модель включены параметры видов, которые наиболее часто встречаются в лесах средней полосы России: Дуб черешчатый (*Quercus robur* L.), Береза повислая (*Betula pendula* Roth), Тополь дрожащий (*Populus tremula* L.), Липа сердцевидная (*Tilia cordata* Mill.), Сосна обыкновенная (*Pinus sylvestris* L.), Ель обыкновенная (*Picea abies* (L.) Н. Karst.), Пихта (*Abies* Mill.). Решено дифференциальное уравнение для диаметра (D) дерева на высоте груди и проведено сравнение с таксационными данными. Проведена оценка запаса углерода надземной биомассы деревьев по методике Международной группы экспертов по изменению климата. Рассчитана динамика изменения объема ствола дерева и построена аналитическая формула, описывающая зависимость объема ствола дерева и запасенного углерода от возраста дерева. Показана хорошая согласованность аналитической и численной зависимостей запасенного углерода от возраста деревьев на лесном участке карбонового полигона Казанского федерального университета в пределах пробной площади с известным видовым составом и количеством деревьев каждого вида.

Ключевые слова: модель роста дерева, диаметр ствола, объем ствола дерева, углерод, аналитическая модель.

Введение

При анализе проблемы глобального изменения климата предполагается, что повышение концентраций парниковых газов, в первую очередь углекислого газа, в атмосфере приводит к процессам роста средней температуры. Лесные экосистемы в значительной степени регулируют содержание углекислого газа в составе атмосферного воздуха за счет его поглощения в процессе фотосинтеза и связывания на продолжительное время – десятилетия и столетия. Можно сказать, что леса играют важную роль в глобальном балансе углерода, являясь элементом, стабилизирующим климатическую систему Земли и обеспечивающим сток углерода в растительные экосистемы. Роль лесов отмечена различными известными международными соглашениями по сохранению глобального климата. Значительный вклад в стабилизацию климатической системы вносят леса России, площадь которых составляет около 21 % площади всех лесов земного шара [1]. Таким образом, прогнозирование глобального баланса углекислого газа в атмосфере должно включать в себя оценку вклада лесной растительности в этот процесс.

В настоящее время разработаны различные методики оценки углеродного бюджета лесов. В методике РОБУЛ Центра по проблемам экологии и продуктивности лесов РАН для расчета запасов углерода в биомассе древостоя используются данные об объемных запасах древесины Государственного лесного реестра в лесничествах и субъектах РФ [2] и коэффициенты для перерасчета запаса древесины в надземную фитомассу, учитывающие плотность древесины и долю углерода в сухом веществе, которая принимается равной 0.5. Система РОБУЛ-М состоит из прогнозного блока динамики лесного фонда и блока расчета углеродных характеристик. Временной шаг для расчетов в РОБУЛ-М равен пяти годам, а прогноз строится на 50 лет [3].

Модель углеродного бюджета лесного сектора Канады CBM-CFS3 (Carbon Budget Model of the Canadian Forest Sector) разработана для учета углеродной динамики в лесных сообществах на территории этой страны [4]. Математическая модель 3D-СМСС FEM (Three Dimensional Forest Ecosystem Model of the Euro-Mediterranean Centre for Climate Change), описывающая годовую и многолетнюю динамику углерода лесных сообществ, представлена в работе [5].

В системе моделей лесных сообществ EFIMOD [6], разработанной в Институте физико-химических и биологических проблем почвоведения РАН, лесная экосистема определяется как совокупность слоя деревьев, слоя наземной растительности, запасов органического вещества и азота в почве. Деревья в данной пространственной модели расположены внутри участка на квадратной сетке с ячейками достаточно малого размера с одним деревом. Каждое дерево конкурирует с ближайшими деревьями за солнечный свет и доступный азот почвы. Модель описывает круговорот углерода в экосистеме, включая динамику органического вещества почвы.

Исследование [7] посвящено анализу 10-летнего эксперимента по посадке обладающего высокой скоростью роста Тополя дельтовидного (*Populus deltoides*) на деградированных сельскохозяйственных землях в долине Миссисипи, США. Проведена оценка динамики накопления углерода в тополиных сообществах с различной плотностью посадки и показано существенное расхождение значений суммарного запаса углерода в них. Авторы приходят к выводу, что плотность посадок с площадью отдельного дерева между значениями 2.1×0.8 м и 2.7×1.8 м будет способствовать максимальному накоплению надземного углерода на десятый год на выбранных участках.

Для изучения потенциала городских лесов в поглощении углерода в исследовании [8] представлена динамика запаса углерода шестью городскими монокультурными лесами Шанхая на основе инвентаризационных данных за 20 лет. Отмечается сильное различие в скорости накопления углерода для тополя (*Populus L.*) по сравнению с широколиственными видами смешанных лесов на ранних этапах развития. На поздних стадиях потенциальное накопление углерода биомассой деревьев в широколиственных смешанных лесах оказалось на 34 % выше, чем у *Populus L.* за весь цикл развития. Выявлено, что тип древостоя, возраст, плотность и форма собственности лесного участка существенно влияют на скорость накопления углерода. В работе [9] предложены аллометрические коэффициенты теоретической модели зависимости объема ствола от диаметра

для различных возрастных классов и видов деревьев (молодняки, средневозрастные, приспевающие, спелые, перестойные).

В области исследований, связанных с оценкой запасов фитомассы, динамики углерода и изучением углеродного цикла, следует отметить известные работы Д.Г. Замолодчикова, А.З. Швиденко, Д.Г. Щепашенко, В.А. Усольцева [1–3, 9–11]. Отдельно выделим работы [1] и [11], в которых приведены базы данных, содержащие сведения о структуре биомассы деревьев с различных лесных площадей. Базы данных создавались с целью обобщения и исследования географических закономерностей структуры фитомассы на уровне модельных деревьев. Популяционная организация растительного покрова лесных территорий (на примере широколиственных лесов европейской части СССР) представлена в работе [12].

Несмотря на развитие описанных выше математических моделей динамики лесных сообществ и расчетных методик оценки запаса углерода, в связи с необходимостью выбора эффективных схем секвестирования углерода сохраняется задача построения простых расчетных формул прогнозирования запаса углерода в лесах с учетом динамики роста деревьев. Цель настоящей работы заключается в создании простой прогнозной модели для расчета динамики запасенного углерода в надземной биомассе деревьев лесных сообществ. В качестве основы принята классическая модель роста одиночного дерева JABOWA [13], реализованная для видов деревьев, формирующих основной облик лесов средней полосы России: Дуб черешчатый (*Quercus robur* L.), Береза повислая (*Betula pendula* Roth), Тополь дрожащий (*Populus tremula* L.), Липа сердцевидная (*Tilia cordata* Mill.), Сосна обыкновенная (*Pinus sylvestris* L.), Ель обыкновенная (*Picea abies* (L.) N. Karst.), Пихта (*Abies* Mill.). По результатам численной модели построена приближенная аналитическая формула для расчета запаса углерода в сообществе нескольких видов деревьев. Построены аналитические и численные кривые изменения запасенного углерода с возрастом для лесного калибровочного участка карбонового полигона Казанского федерального университета «Карбон-Поволжье».

1. Материалы и методы

1.1. Модель роста дерева JABOWA. Одна из наиболее известных моделей роста разновозрастных смешанных насаждений JABOWA (авторы – D.B. Botkin, J.F. Janak, J.R. Wallis) создана на основе данных с экспериментальных прямоугольных площадок размером 10×10 м, заложенных в процессе исследования лесной экосистемы Хаббард-Брук на севере Нью-Гэмпшира, США [13]. Согласно предположению, что деревья собирают такое количество солнечной энергии, которое примерно пропорционально площади их листовой поверхности LA , дифференциальное уравнение скорости изменения объема ствола дерева ($\sim D^2H$) (уравнение 1) записывается в виде:

$$\frac{d(D^2H)}{dt} = RLA \left(1 - \frac{DH}{D_{\max} H_{\max}} \right), \quad (1)$$

где D – диаметр дерева на высоте груди, H – высота дерева, D_{\max} и H_{\max} – максимальные значения диаметра и высоты дерева соответственно, R – параметр роста, определяемый скоростью фотосинтеза.

Согласно уравнению 1, скорость изменения объема ствола дерева с возрастом пропорциональна количеству солнечного света, получаемого деревом. Выражение в скобках учитывает уменьшение коэффициента прироста дерева, так что при достижении максимальных значений D_{\max} и H_{\max} рост остановится. Модель, описываемая уравнением 1, учитывает, что скорость прироста и максимальные значения высоты и диаметра зависят от вида дерева.

В литературе предложены различные аллометрические соотношения, связывающие геометрические характеристики деревьев. Авторы [14] сравнивают полиномиальное и экспоненциальное уравнения для аппроксимации зависимости высоты от диаметра дерева для сосновых насаждений Караульного участкового лесничества, Красноярский край (уравнения 2 и 3 соответственно):

$$H = a + bD + cD^2; \quad (2)$$

$$H = a(1 - e^{-bD}), \quad (3)$$

где a , b , c – аппроксимационные коэффициенты.

В работе [15] получена зависимость величины среднего диаметра дерева от высоты для сосны в различных типах леса Марийского Заволжья (уравнение 4):

$$D = \frac{2.219H^{0.940}}{(1 + N)^{0.335}}, \quad (4)$$

где N , тыс. экз./га – исходная густота насаждений.

В этой же работе для описания хода роста сосны по высоте использована асимптотическая формула (уравнение 5):

$$H = H_{\max} \left(1 - e^{-\frac{at}{100}}\right). \quad (5)$$

В исследовании [16] для описания соотношения высоты H и диаметра ствола D предложена квадратичная зависимость (уравнение 6):

$$H = b_1 + b_2D - b_3D^2, \quad (6)$$

где $b_1 = 137$ см – высота дерева на уровне груди.

Коэффициенты b_2 и b_3 определяются для каждого вида дерева по уравнениям 7 и 8 соответственно:

$$b_2 = \frac{2(H_{\max} - 137)}{D_{\max}}; \quad (7)$$

$$b_3 = \frac{H_{\max} - 137}{D_{\max}^2}. \quad (8)$$

В дальнейшем остановимся на уравнении 6, с учетом которого уравнение 1 преобразовывается в уравнение 9:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{RLA \left(1 - \frac{DH}{D_{\max} H_{\max}}\right)}{D(274 + 3b_2D - 4b_3D^2)}. \quad (9)$$

Учитывая предположение о пропорциональности площади листа его весу [1], уравнение 9 приобретает следующий вид (уравнение 10):

$$\frac{dD}{dt} = \frac{GD \left(1 - \frac{D(b_1 + b_2 D - b_3 D^2)}{D_{\max} H_{\max}} \right)}{274 + 3b_2 D - 4b_3 D^2}, \quad (10)$$

где $G = RC_i$ (C_i – константа листового индекса). Таким образом, модель JABOWA (уравнение 10) является обыкновенным дифференциальным уравнением для диаметра $D = D(t)$ деревьев как функции возраста (диаметр измеряется на высоте груди). Приведенные в уравнении 10 параметры G , D_{\max} , H_{\max} , b_2 и b_3 характеризуют отдельные виды деревьев. Для рассматриваемых видов деревьев величины максимальных диаметра и высоты получены из данных таксационных измерений в работе [11] и приведены в табл. 1. Сборник таблиц хода роста деревьев составлен на основе информации о росте и развитии древостоев Северной Евразии в области 40° северной широты (для случаев недостаточности информации по лесам России были использованы данные о лесах прилегающих территорий, в частности Белоруссии, Украины, Казахстана, балтийских стран). Данные табл. 1 соответствуют бонитету I условий роста деревьев. Поскольку значения высот и диаметров существенно отличаются для различных условий произрастания, особенно первого и последнего бонитета, в табл. 2 для сравнения приведены данные по бонитету V для рассматриваемых видов деревьев (для липы – бонитет IV). Для определения неизвестного параметра G методом наименьших квадратов решается задача минимизации функционала согласно уравнению 11:

$$J = \sum_{i=1}^N (D(t_i) - D^T(t_i))^2, \quad (11)$$

где t_i – время таксационной оценки характеристик деревьев (табл. 1 и 2). Рассчитанные значения G и величины D_{\max} , H_{\max} , b_2 и b_3 приведены в табл. 3. При заданном значении начального диаметра дерева дифференциальное уравнение 10 решается численно с помощью процедуры `odeint` в среде Python.

Полученные на основе модели роста дерева JABOWA кривые зависимости диаметра дерева от возраста представлены на рис. 1. Для сравнения приведены таксационные данные из табл. 1 [11], соответствующие бонитету I. Наблюдается хорошее согласие расчетных и таксационных данных. Строго говоря, параметры G , D_{\max} и H_{\max} следует определять для каждого бонитета отдельно.

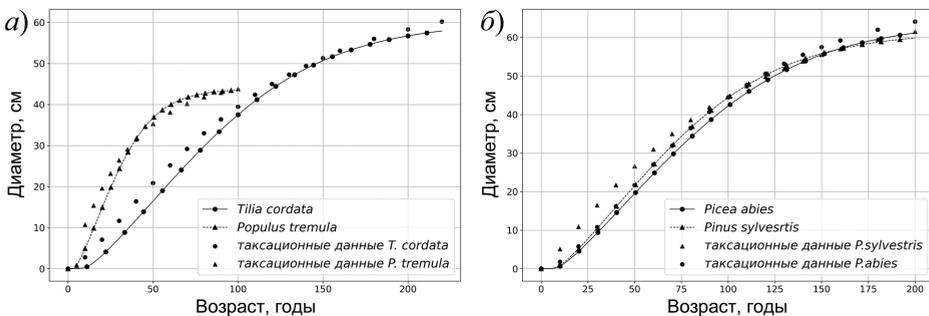


Рис. 1. Сравнение полученной из численной модели зависимости диаметра дерева от возраста с таксационными данными

В табл. 4 даны значения параметра G для Сосны обыкновенной, найденные для различных бонитетов.

Табл. 3

Основные параметры в уравнениях 10, 12 и 13 для ряда видов деревьев РФ (бонитет I)

Вид	Бонитет I				Бонитет V				a	b	$\rho, \text{т/м}^3$		
	G	$D_{\text{max}}, \text{см}$	$H_{\text{max}}, \text{м}$	b_2	b_3	G	$D_{\text{max}}, \text{см}$	$H_{\text{max}}, \text{м}$				b_2	b_3
	Дуб черешчатый (<i>Quercus robur</i> L.)	161	78.2	42	103.913	0.664	84	29.5				15.5	95.977
Береза повислая (<i>Betula pendula</i> Roth)	310	38.1	34.4	173.386	2.275	115	14.2	14.7	187.746	6.611	3.551	0.967	0.51
Тополь дрожащий (<i>Populus tremula</i> L.)	433	43.8	32.5	142.146	1.623	154	13.1	14	192.824	7.36	2.997	1.036	0.35
Липа сердцевидная (<i>Tilia cordata</i> Mill.)	170	60.2	38.4	123.023	1.022	92	32.8	21	119.695	1.825	4.591	0.910	0.43
Сосна обыкновенная (<i>Pinus sylvestris</i> L.)	218	61.5	42	132.13	1.074	37	13	7.5	94.307	3.627	5.180	0.868	0.42
Ель обыкновенная (<i>Picea abies</i> (L.) H. Karst.)	203	64.1	44	133.011	1.038	60	18	13.3	132.5	3.68	3.583	0.992	0.40
Пихта (<i>Abies</i> Mill.)	207	44.4	34.8	150.585	1.696	88	23.7	17.6	136.962	2.889	3.861	0.943	0.40

Табл. 4

Таксационные данные из работы [11] и рассчитанные параметры G для Сосны обыкновенной

Ia		Бонитет										Va		Vb			
		Ib	I		II		III		IV		V						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$H, \text{м}$	5.1	4.9	4.3	4.1	3.5	3.3	2.8	2.5	2.2	1.7	1.6	1.1	—	0.7	—	—	—
$D, \text{см}$	10.9	10.2	9.3	8.7	7.7	7.1	6.3	5.5	5.1	4.0	3.9	2.8	2.9	1.7	2.0	0.8	—
$H, \text{м}$	16.5	14.9	14.1	12.8	12.0	10.6	9.9	8.4	8.1	6.4	6.4	4.6	4.9	3.0	3.5	1.6	2.4

Соответствующие зависимости высоты дерева от возраста показаны на рис. 2. Для сравнения приведены кривые $H(t)$ из работы [1]. Заметно, что рост дерева в значительной степени определяется бонитетом условий его обитания. Зависимость, построенная в работе [15] для сосняков двух типов (лишайниково-вересковый и брусничниковый), лучше всего соотносится с кривой роста, полученной по модели, описываемой уравнением 10, на основе данных по бонитету II.

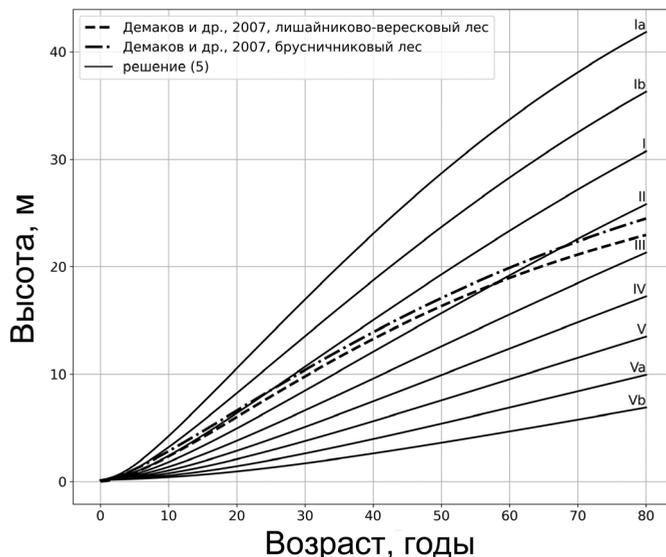


Рис. 2. Кривые роста Сосны обыкновенной для различных бонитетов

1.2. Формула для расчета запаса углерода. Найденная из решения уравнения 10 зависимость диаметра дерева от возраста $D(t)$ позволяет с учетом уравнения 6 рассчитать зависимость высоты дерева от времени $H(t)$. Для оценки запасенного углерода следует определить объем или биомассу всего дерева, включая различные его фракции. В литературе приведены различные аллометрические зависимости объема дерева от его диаметра и высоты [17, 18]. Строго говоря, анализ запасенного углерода должен касаться всех фракций дерева, включая ствол, ветви, корни, листву и кору. Вместе с тем известно, что основная биомасса деревьев сосредоточена в его стволе, поэтому в настоящей статье ограничимся анализом стволовой биомассы. В работе [19] приведена формула для расчета объема ствола дерева (V) как функции его диаметра и высоты:

$$V = a \times 10^{-5} \times H^b (D+1)^2, \quad (12)$$

где a и b – известные параметры для различных видов деревьев (табл. 3). Таким образом, из решения уравнений 10 и 12 можно рассчитать зависимость объема ствола дерева или биомассы $V(t)$ от его возраста, знание которой позволяет прогнозировать динамику запасенного углерода различными видами деревьев.

Для оценки углеродного бюджета лесов обычно используют рекомендованную Межправительственной группой экспертов по изменению климата формулу расчета запаса углерода C [20] (уравнение 13):

$$C = (1 + R) \times CF \times \rho \times BEF \times V, \quad (13)$$

где V – товарный запас древесины, м³, ρ – плотность абсолютно сухой древесины, т сухого вещества/м³, BEF – коэффициент разрастания фитомассы для преобразования товарного запаса древесины в надземную фитомассу деревьев (по умолчанию 1.4), R – соотношение массы корней и побегов (по умолчанию 0.5), CF – доля углерода в сухом веществе (по умолчанию 0.5), т С/т сухого вещества. Плотности абсолютно сухой стволовой древесины (ρ) представлены в табл. 3 [20].

Оценку запаса углерода можно проводить как для каждого отдельного дерева, так и для набора деревьев исследуемой площади. В последнем случае полученное значение запаса углерода умножается на количество деревьев данного вида и суммируется со значениями, полученными для других видов.

Построим аппроксимацию численных кривых роста деревьев, полученных по модели JABOWA (уравнение 10). В качестве аппроксимационной функции выберем аналитическое решение уравнения динамики одиночной популяции Ферхюльста–Пирла, записанное для переменной – объема дерева $V(t)$ (уравнение 14):

$$V = \frac{V_{\max} V_0}{V_0 + e^{-r_m t} (V_{\max} - V_0)}. \quad (14)$$

Используя это уравнение и введя параметры – количество деревьев i -го вида (N_i) и площадь участка леса (S), запишем формулу для оценки запаса углерода в сообществе различных видов деревьев на конкретном участке (уравнение 15):

$$C(t) = (1 + R) \times CF \times BEF \times S^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{N_i \rho_i V_{\max_i} V_{0_i}}{V_{0_i} + e^{-r_{m_i} t} (V_{\max_i} - V_{0_i})}. \quad (15)$$

Параметры V_0 , V_{\max} , r_m аналитической модели для каждого вида дерева, найденные методом наименьших квадратов, приведены в табл. 5. Для проверки точности аппроксимации параметры V_0 , V_{\max} находили для различного количества точек значений $V(t)$, определяемых из численной модели. Расчеты показали, что полученные значения практически не отличаются.

Табл. 5

Параметры V_0 , V_{\max} , r_m аналитической модели (уравнение 14) для бонитета I

Вид	Бонитет I			Бонитет V		
	r_m	V_{\max}	V_0	r_m	V_{\max}	V_0
Дуб черешчатый (<i>Quercus robur</i> L.)	0.036	7.445	0.104	0.038	0.579	0.015
Береза повислая (<i>Betula pendula</i> Roth)	0.073	1.559	0.029	0.071	0.096	0.002
Тополь дрожащий (<i>Populus tremula</i> L.)	0.104	2.071	0.041	0.087	0.087	0.002
Липа сердцевидная (<i>Tilia cordata</i> Mill.)	0.037	4.358	0.075	0.032	0.824	0.02
Сосна обыкновенная (<i>Pinus sylvestris</i> L.)	0.043	4.78	0.090	0.036	0.057	0.001
Ель обыкновенная (<i>Picea abies</i> (L.) H. Karst.)	0.039	5.88	0.095	0.034	0.163	0.004
Пихта (<i>Abies</i> Mill.)	0.044	2.227	0.052	0.037	0.344	0.008

2. Результаты и их обсуждение

На рис. 3 представлены кривые зависимости объема ствола дерева от возраста, найденные по численной модели (уравнение 10) и аналитической формуле (уравнение 12). Из рисунка видно, что изменение объема ствола дерева во времени имеет S-образный характер. Наблюдается значительное отличие в величине изменения объема для различных видов деревьев. Так, для дуба характерно самое стремительное возрастание объема до значений около 7 м^3 к возрасту 200 лет. Наименьший рост объема ствола в течение жизненного цикла (около $1.5\text{--}2 \text{ м}^3$) у тополя, березы и пихты. Кривая изменения объема ствола тополя имеет более стремительный характер возрастания на начальных стадиях роста, чем у остальных представленных видов деревьев.

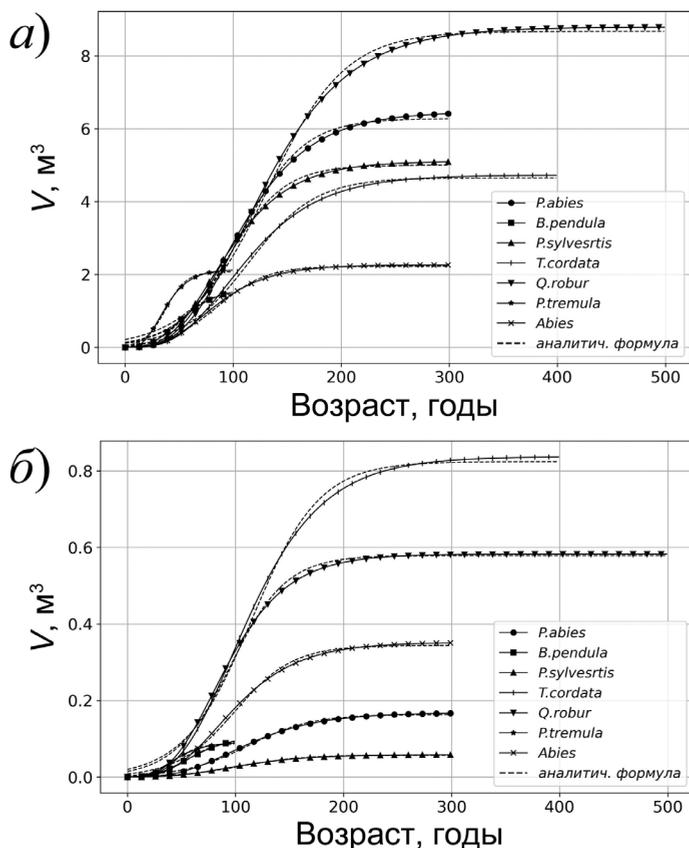


Рис. 3. Зависимость объема стволов деревьев различных видов от возраста для бонитетов I (а) и V (б)

Рис. 4 показывает различия в скорости прироста объема и, соответственно, накопления углерода в биомассе деревьев. Отличия между видами проявляются не только в значениях максимума изменения объема, но и в возрасте, при котором достигается этот пик. Так, например, заметно выделяется скорость изменения объема и накопления углерода у тополя. Максимальных значений этих характеристик тополь достигает в возрасте около 25 лет, в отличие от других видов, у которых пик смещен к 50–110 годам. Вероятно, анализ этих характеристик

должен играть решающую роль в вопросах управления лесами для повышения эффективности секвестрации углерода.

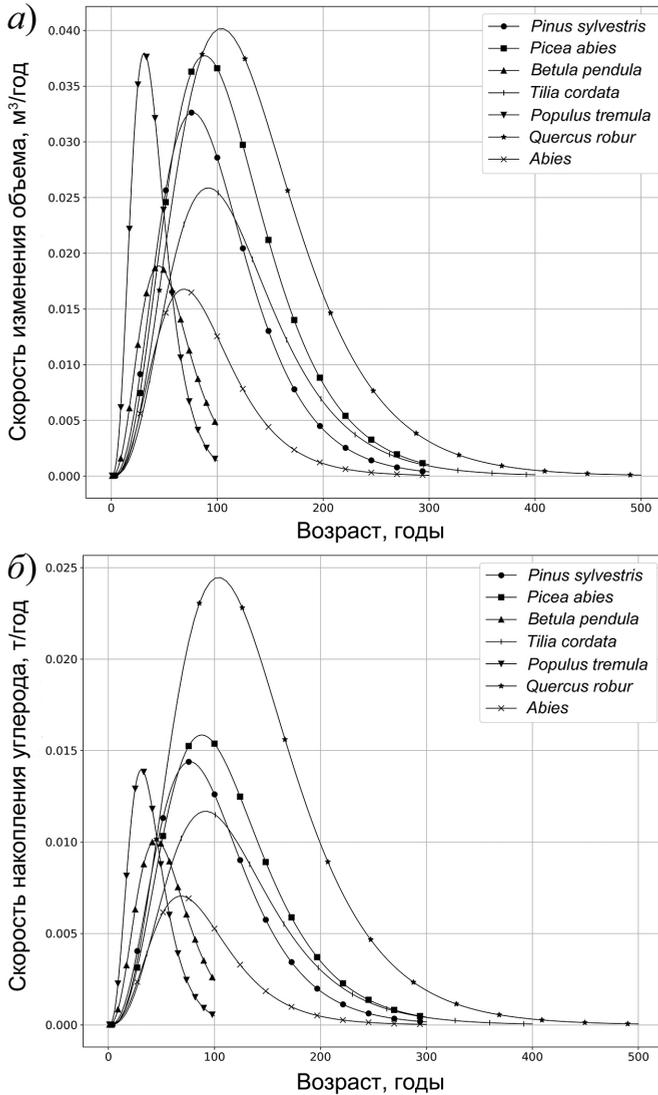


Рис. 4. Скорость изменения объема (а) и накопления углерода (б) у деревьев различных видов (бонитет I)

На пробной площади размером 50×50 м лесного участка карбонового полигона «Карбон-Поволжье» (территория Обсерватории имени В.П. Энгельгардта Казанского федерального университета [21]), проведены измерения диаметра и высоты 75 деревьев вида *Betula pendula* Roth и 10 деревьев вида *Tilia cordata* Mill. На исследуемом участке Липа сердцевидная имеет максимальный возраст 109 лет, средний возраст – 60 лет, средний диаметр составляет 35 см, а средняя высота – 36 м. Береза повислая в основном представлена деревьями высотой 29–36 м и диаметром 30–70 см, средний возраст которых составляет примерно 70 лет. Оценка запаса углерода по измеренным данным на рассматриваемом участке дает запасы углерода в размере ~163 т/га.

С помощью численной модели и аналитической формулы (уравнение 15) рассчитана динамика накопления углерода на выбранном участке для липы и березы, соответствующих бонитетам I и V (рис. 5). Наблюдается хорошее согласие численной и аналитической моделей. Максимально возможный запас углерода приближается к значениям ~ 650 т/га или ~ 100 т/га, если состояние древостоя соответствует бонитетам I и V соответственно. Из рис. 5 видно, что данные измерений (штрихпунктирная линия) находятся внутри диапазона кривых, соответствующих наиболее высокому и низкому бонитетам. Таким образом, можно сделать вывод, что при прогнозировании динамики роста биомассы деревьев и запасенного углерода необходимо включать в рассмотрение в качестве параметра бонитет как одну из основных характеристик условий обитания деревьев.

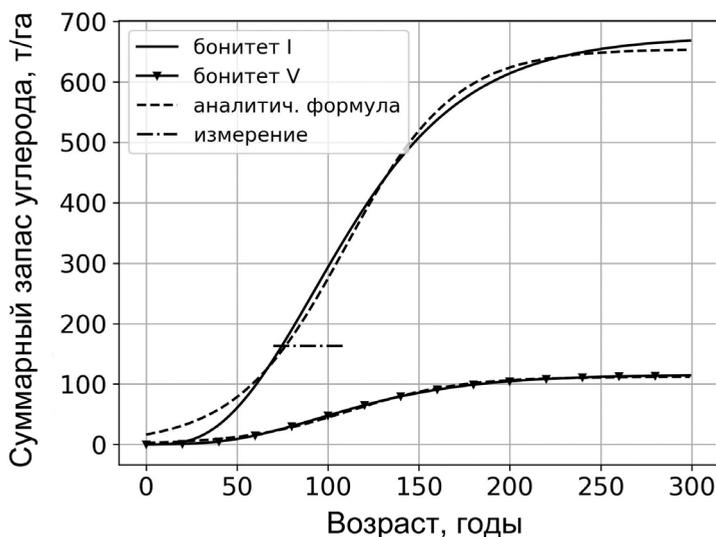


Рис. 5. Суммарный запас углерода на пробной площади лесного участка карбонового полигона «Карбон-Поволжье» Казанского федерального университета

Полученные оценки запасенного углерода в целом согласуются с оценками из других работ. Так, в исследовании [8] асимптотический предел роста, представляющий собой максимальное значение запасенного углерода, составил 172.8 т/га для смешанных широколиственных городских лесов Шанхая, возраст посадок в которых составлял в среднем от 15 до 25 лет. Для широколиственных лесов умеренного пояса на основе оценки 449 наблюдений из 18 стран предсказано накопление углерода около 100 т/га к 75 годам [22]. В работе [23] исследована динамика возрастного изменения фитомассы пихты и запасенного углерода для папоротниково-моховых пихтовых древостоев Бирюсинского участкового лесничества, которая отражает их углеродный потенциал, стремящийся к значению 102.8 т/га к 150 годам.

Заключение

Развита математическая модель для расчета запасенного углерода надземной биомассы в лесном сообществе, состоящем из различных видов деревьев.

На основе численного решения дифференциального уравнения для диаметра дерева на высоте груди в рамках классической модели роста одиночного дерева JABOWA рассчитана динамика изменения объема ствола различных видов деревьев средней полосы Российской Федерации. Для оценки массы углерода в сообществе различных видов деревьев построена формула, включающая в качестве параметра возраст деревьев. Приведены результаты расчетов зависимости запасенного углерода от возраста дерева для рассмотренных видов деревьев. Показано различие в скорости прироста объема и, соответственно, накопления углерода в биомассе различных видов деревьев. Полученные оценки запасенного углерода согласуются с литературными данными, а также с результатами для лесного участка карбонового полигона Казанского федерального университета. Полученная формула позволяет проводить оценку запасенного углерода в лесном сообществе с произвольным составом видов разновозрастных деревьев, а также давать прогноз на будущее, в том числе при планировании лесотехнической деятельности.

Вместе с тем необходимо отметить, что при прогнозировании динамики роста биомассы деревьев и запасенного углерода имеет значение бонитет, который является производным параметром, определяемым условиями обитания деревьев. Создание математической модели, учитывающей бонитет в качестве параметра, повысило бы возможности прогноза роста биомассы и запасенного углерода лесных сообществ. Кроме того, развитая в настоящей работе математическая модель описывает динамику уже известного состава лесного сообщества без учета естественного возобновления леса. Чтобы отразить вклад этого параметра, следует использовать пространственные диффузионные модели, описывающие воспроизводство леса на нелесных участках.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № FZSM-2024-0004).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Усольцев В.А. Фитомасса модельных деревьев лесообразующих пород Евразии: база данных, климатически обусловленная география, таксационные нормативы. Екатеринбург: Урал. гос. лесотехн. ун-т, 2016. 338 с.
2. Замолодчиков Д.Г., Уткин А.И., Честных О.В. Коэффициенты конверсии запасов насаждений в фитомассу основных лесообразующих пород России // Лесная таксация и лесоустройство. 2003. Вып. 1 (32). С. 119–127.
3. Замолодчиков Д.Г., Грабовский В.И., Честных О.В. Прогноз углеродного бюджета лесных территорий // Математическое моделирование в экологии: материалы Шестой Национальной научной конференции с международным участием (26–29 сентября 2019 г.). Пушино: Институт физико-химических и биологических проблем почвоведения РАН, 2019. С. 87–88.
4. Pilli R., Kull S.J., Blujdea V.N.B., Grassi G. The Carbon Budget Model of the Canadian Forest Sector (CBM-CFS3): Customization of the Archive Index

- Database for European Union Countries // *Ann. For. Sci.* 2018. V. 75, No 3. Art. 71. <https://doi.org/10.1007/s13595-018-0743-5>.
5. *Kull S.J., Rampley G.J., Morken S., Metsaranta J.M., Neilson E.T., Kurz W.A.* Operational-Scale Carbon Budget Model of the Canadian Forest Sector (CBM-CFS3), Version 1.2: User's Guide. Edmonton, AB: Nat. Resour. Can., Can. For. Serv., North. For. Cent., 2011. 344 p.
 6. *Komarov A., Chertov O., Zudin S., Nadporozhskaya M., Mikhailov A., Bykhovets S., Zudina E., Zoubkova E.* EFIMOD 2 – a model of growth and cycling of elements in boreal forest ecosystems // *Ecol. Modell.* 2003. V. 170, Nos 2–3. P. 373–392. [https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(03\)00240-0](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(03)00240-0).
 7. *Gardiner E.S., Poudel K.P., Leininger T.D., Souter R.A., Rousseau R.J., Dahal B.* Early dynamics of carbon accumulation as influenced by spacing of a *Populus deltoides* planting // *Forests.* 2024. V. 15, No 2. Art. 226. <https://doi.org/10.3390/f15020226>.
 8. *Ma F., Zhang W., Yan J., Zhang T., Lu N., Yao M., Zhang T., Zheng J., Yin S.* Early advantage for carbon sequestration of monocultures and greater long-term carbon sink potential of broadleaf mixed forests: 20-year evidence from the Shanghai Green Belt // *Ecol. Indic.* 2024. V. 159. Art. 111655. <https://doi.org/10.1016/j.ecolind.2024.111655>.
 9. *Швиденко А.З., Щепищенко Д.Г.* Углеродный бюджет лесов России // *Сибирский лесной журнал.* 2014. № 1. С. 69–92.
 10. *Замолодчиков Д.Г., Грабовский В.И., Честных О.В.* Динамика баланса углерода в лесах федеральных округов Российской Федерации // *Вопросы лесной науки.* 2018. Т. 1. № 1. С. 1–24. <https://doi.org/10.31509/2658-607X-2018-1-1-1-24>.
 11. *Швиденко А.З., Щепищенко Д.Г., Нильссон С., Булуй Ю.И.* Таблицы и модели хода роста и продуктивности насаждений основных лесообразующих пород Северной Евразии: нормативно-справочные материалы. М.: Федеральное агентство лесного хозяйства, Международный институт прикладного системного анализа, 2008. 886 с.
 12. *Смирнова О.В., Чистякова А.А., Попадюк Р.В., Евстигнеев О.И., Коротков В.Н., Митрофанова М.В., Пономаренко Е.В.* Популяционная организация растительного покрова лесных территорий (на примере широколиственных лесов европейской части СССР). Пушино: ОНТИ Научный центр биологических исследований АН СССР, 1990. 92 с.
 13. *Botkin D.B., Janak J.F., Wallis J.R.* Rationale, limitations, and assumptions of a northeastern forest growth simulator // *IBM J. Res. Dev.* 1972. V. 16, No 2. P. 101–116. <https://doi.org/10.1147/rd.162.0101>.
 14. *Соловьева О.Е., Вайс А.А.* Соотношение высот и диаметров деревьев в сосновых древостоях Восточного Саяна // *Хвойные бореальной зоны.* 2019. Т. 37. № 3–4. С. 242–249.
 15. *Демаков Ю.П., Козлова И.А.* Математические модели хода роста культур сосны для различных типов леса Марийского Заволжья // *Вестник Казанского ГАУ.* 2007. Т. 2. № 2 (6). С. 83–91.
 16. *Ker J.W., Smith J.H.G.* Advantages of the parabolic expression of height-diameter relationships // *For. Chron.* 1955. V. 31, No 3. P. 236–246. <https://doi.org/10.5558/tfc31236-3>.
 17. *Duangstathaporn K., Sangram N., Omule Y., Prasomsin P., Palakit K., Lumyai P.* Formulating equations for estimating forest stand carbon stock for various tree species groups in northern Thailand // *Forests.* 2023. V. 14, No 8. Art. 1584. <https://doi.org/10.3390/f14081584>.
 18. *Bornand A., Rehush N., Morsdorf F., Thürig E., Abegg M.* Individual tree volume estimation with terrestrial laser scanning: Evaluating reconstructive

- and allometric approaches // *Agric. For. Meteorol.* 2023. V. 341. Art. 109654. <https://doi.org/10.1016/j.agrformet.2023.109654>.
19. *Демаков Ю.П., Пуряев А.С., Черных В.Л., Черных Л.В.* Использование аллометрических зависимостей для оценки фитомассы различных фракций деревьев и моделирования их динамики // *Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Лес. Экология. Природопользование.* 2015. № 2 (26). С. 19–36.
 20. Руководящие указания по эффективной практике для землепользования, изменений в землепользовании и лесного хозяйства. Программа МГЭИК по национальным кадастрам парниковых газов. М.: МГЭИК, ВМО, 2003. 330 с.
 21. *Нургалеев Д.К., Селивановская С.Ю., Кожевникова М.В., Галицкая П.Ю.* Некоторые вызовы и возможности для России и регионов в плане глобального тренда декарбонизации // *Георесурсы.* 2021. Т. 23. № 3. С. 8–16. <https://doi.org/10.18599/grs.2021.3.2>.
 22. *Bukoski J.J., Cook-Patton S.C., Melikov C., Ban H., Chen J.L., Goldman E.D., Harris N.L., Potts M.D.* Rates and drivers of aboveground carbon accumulation in global monoculture plantation forests // *Nat. Commun.* 2022. V. 13, No 1. Art. 4206. <https://doi.org/10.1038/s41467-022-31380-7>.
 23. *Kalachev V.A., Vais A.A., Anuev E.A., Martynova D.O.* Phyto mass accumulation and the carbon potential of modal fir stands determination in the conditions of the Krasnoyarsk-Kansk podtaezhno-forest-steppe region // *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.* 2020. V. 548. Art. 052016. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/548/5/052016>.

Поступила в редакцию 12.07.2024

Принята к публикации 15.08.2024

Зарипов Шамиль Хузеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой моделирования экосистем Института экологии и природопользования

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: shamil.zaripov@kpfu.ru

Тарасова Дарья Алексеевна, студент 4 курса бакалавриата Института экологии и природопользования

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: tarasowa.darja.ta@yandex.ru

Кожевникова Мария Владимировна, кандидат биологических наук, заместитель директора по научной деятельности Института экологии и природопользования

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: MKozhevnikova@kpfu.ru

Костерина Екатерина Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры моделирования экосистем Института экологии и природопользования

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: Ekaterina.Kosterina@kpfu.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2542-064X.2024.4.704-723

**A Mathematical Model for Estimating Carbon Storage Dynamics
of Forest Communities**

Sh.Kh. Zaripov*, D.A. Tarasova**, M.V. Kozhevnikova***, E.A. Kosterina****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: *shamil.zaripov@kpfu.ru, **tarasowa.darja.ta@yandex.ru,
MVKozhevnikova@kpfu.ru, *Ekaterina.Kosterina@kpfu.ru

Received July 12, 2024; Accepted August 15, 2024

Abstract

Using the JABOWA single-tree growth model, a program was designed to estimate carbon storage dynamics in the aboveground biomass of a mixed forest community. The developed model incorporates the parameters of tree species that are common to the forests of Central Russia: pedunculate oak (*Quercus robur* L.), silver birch (*Betula pendula* Roth), common aspen (*Populus tremula* L.), small-leaved lime (*Tilia cordata* Mill.), Scots pine (*Pinus sylvestris* L.), Norway spruce (*Picea abies* (L.) H. Karst.), and fir (*Abies* Mill.). A differential equation for tree diameter at breast height (D) was solved. The results were compared with the forest inventory data. The amount of carbon stored in the aboveground biomass of trees was calculated following the methodology suggested by the Intergovernmental Panel on Climate Change. The dynamics of tree volume were analyzed. An analytical formula was proposed to describe the dependence of tree volume and stored carbon on tree age. The differences in the rates of tree volume growth and carbon accumulation were identified among the species studied. The analytical and numerical results on stored carbon and tree age showed a good agreement for a test plot with the known species composition and tree count, which is located within the forest part of the carbon polygon of Kazan Federal University. The formula offers an accurate estimation and prediction of carbon storage dynamics in mixed forest communities with trees varying in age and, hence, is a valuable tool for managing forestry activities. However, when predicting tree biomass growth and carbon storage dynamics, one should also consider forest site quality classes reflecting the actual growth conditions of trees. Developing a mathematical model based on forest site quality classes as a key variable would help increase the reliability of biomass growth and carbon storage predictions for forest communities. Notably, the obtained model applies to actual forest communities with known species composition and fails to account for natural regeneration. To incorporate this parameter, spatial diffusion models that describe forest regeneration in non-forest areas should be utilized.

Keywords: tree growth model, tree diameter, tree volume, carbon, analytical model**Acknowledgments.** This study was funded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities (project no. FZSM-2024-0004).**Conflicts of Interest.** The authors declare no conflicts of interest.**Figure Captions**

Fig. 1. Comparison of the dependence of tree diameter on tree age from the numerical model with the forest inventory data.

Fig. 2. Growth curves of Scots pine for various forest site quality classes.

Fig. 3. Dependence of tree volume on tree age for various species in forest site quality classes I (a) and V (b).

Fig. 4. Rates of tree volume change (a) and carbon accumulation (b) in various species (forest site quality class I).

Fig. 5. Total carbon stored in the test plot within the forest part of the Carbon Volga polygon of Kazan Federal University.

References

1. Usol'tsev V.A. *Fitomassa model'nykh derev'ev lesobrazuyushchikh porod Evrazii: baza dannyykh, klimaticheskii obuslovlennaya geografiya, taksatsionnye normativy* [Single-Tree Biomass of Major Forest-Forming Species in Eurasia: Database, Climate-Driven Shifts, Inventory Standards]. Yekaterinburg, Ural. Gos. Lesotekh. Univ., 2016. 338 p. (In Russian)
2. Zamolodchikov D.G., Utkin A.I., Chestnykh O.V. The factors of converting forest stand volume into phytomass for major forest-forming species in Russia. *Lesn. Taksatsiya Lesoustroistvo*, 2003, no. 1 (32), pp. 119–127. (In Russian)
3. Zamolodchikov D.G., Grabovskii V.I., Chestnykh O.V. Predicting the carbon budget of forest areas. *Matematicheskoe modelirovanie v ekologii: materialy Shestoi Natsional'noi nauchnoi konferentsii c mezhdunarodnym uchastiem (26–29 sentyabrya 2019 g.)* [Mathematical Modeling in Ecology: Proc. 6th Natl. Sci. Conf. with Int. Participation (September 26–29, 2019)]. Pushchino, Inst. Fiz.-Khim. Biol. Probl. Pochvoved. Ross. Akad. Nauk, 2019, pp. 87–88. (In Russian)
4. Pilli R., Kull S.J., Blujdea V.N.B., Grassi G. The Carbon Budget Model of the Canadian Forest Sector (CBM-CFS3): Customization of the Archive Index Database for European Union Countries. *Ann. For. Sci.*, 2018, vol. 75, no. 3, art. 71. <https://doi.org/10.1007/s13595-018-0743-5>.
5. Kull S.J., Rampley G.J., Morken S., Metsaranta J.M., Neilson E.T., Kurz W.A. *Operational-Scale Carbon Budget Model of the Canadian Forest Sector (CBM-CFS3), Version 1.2: User's Guide*. Edmonton, AB, Nat. Resour. Can., Can. For. Serv., North. For. Cent., 2011. 344 p.
6. Komarov A., Chertov O., Zudin S., Nadporozhskaya M., Mikhailov A., Bykhovets S., Zudina E., Zoubkova E. EFIMOD 2 – a model of growth and cycling of elements in boreal forest ecosystems. *Ecol. Modell.*, 2003, vol. 170, nos. 2–3, pp. 373–392. [https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(03\)00240-0](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(03)00240-0).
7. Gardiner E.S., Poudel K.P., Leininger T.D., Souter R.A., Rousseau R.J., Dahal B. Early dynamics of carbon accumulation as influenced by spacing of a *Populus deltoides* planting. *Forests*, 2024, vol. 15, no. 2, art. 226. <https://doi.org/10.3390/f15020226>.
8. Ma F., Zhang W., Yan J., Zhang T., Lu N., Yao M., Zhang T., Zheng J., Yin S. Early advantage for carbon sequestration of monocultures and greater long-term carbon sink potential of broadleaf mixed forests: 20-year evidence from the Shanghai Green Belt. *Ecol. Indic.*, 2024, vol. 159, art. 111655. <https://doi.org/10.1016/j.ecolind.2024.111655>.
9. Shvidenko A.Z., Schepaschenko D.G. Carbon budget of Russian forests. *Sib. Lesn. Zh.*, 2014, no. 1, pp. 69–92. (In Russian)
10. Zamolodchikov D.G., Grabowsky V.I., Chestnykh O.V. Carbon budget dynamics in the forests of Russian federal districts. *Vopr. Lesn. Nauki*, 2018, vol. 1, no. 1, pp. 1–24. <https://doi.org/10.31509/2658-607X-2018-1-1-1-24>. (In Russian)
11. Shvidenko A.Z., Schepaschenko D.G., Nilsson S., Bului Yu.I. *Tablitsy i modeli khoda rosta i produktivnosti nasazhdenii osnovnykh lesobrazuyushchikh porod Severnoi Evrazii: normativno-spravochnye materialy* [Tables and Models of Forest Growth and Productivity for Major Forest-Forming Species of Northern Eurasia: Regulatory and Reference Materials]. Moscow, Fed. Agentstvo Lesn. Khoz., Mezhdunar. Inst. Prikl. Sist. Anal., 2008. 886 p. (In Russian)
12. Smirnova O.V., Chistyakova A.A., Popadyuk R.V., Evstigneev O.I., Korotkov V.N., Mitrofanova M.V., Ponomarenko E.V. *Populyatsionnaya organizatsiya rastitel'nogo pokrova lesnykh territorii (na primere shirokolistvennykh lesov evropeiskoi chasti SSSR)* [The Population Structure of Vegetation Cover in Forest Areas (A Study of Broad-Leaved Forests across the European Part of the USSR)]. Pushchino, ONTI Nauchn. Tsentr Biol. Issled. Akad. Nauk SSSR, 1990. 92 p. (In Russian)
13. Botkin D.B., Janak J.F., Wallis J.R. Rationale, limitations, and assumptions of a northeastern forest growth simulator. *IBM J. Res. Dev.*, 1972, vol. 16, no. 2, pp. 101–116. <https://doi.org/10.1147/rd.162.0101>.
14. Solov'eva O.E., Vais A.A. The ratio of tree heights and diameters in pine stands of the Eastern Sayan. *Khvoynye Boreal'noi Zony*, 2019, vol. 37, nos. 3–4, pp. 242–249. (In Russian)

15. Demakov Yu.P., Kozlova I.A. Mathematical models of pine growth in various forest types of the Mari Trans-Volga region. *Vestn. Kazan. GAU*, 2007, no. 2 (6), pp. 83–91. (In Russian)
16. Ker J.W., Smith J.H.G. Advantages of the parabolic expression of height-diameter relationships. *For. Chron.*, 1955, vol. 31, no. 3, pp. 236–246. <https://doi.org/10.5558/tfc31236-3>.
17. Duangsathaporn K., Sangram N., Omule Y., Prasomsin P., Palakit K., Lumyai P. Formulating equations for estimating forest stand carbon stock for various tree species groups in northern Thailand. *Forests*, 2023, vol. 14, no. 8, art. 1584. <https://doi.org/10.3390/f14081584>.
18. Bornand A., Rehush N., Morsdorf F., Thürig E., Abegg M. Individual tree volume estimation with terrestrial laser scanning: Evaluating reconstructive and allometric approaches. *Agric. For. Meteorol.*, 2023, vol. 341, art. 109654. <https://doi.org/10.1016/j.agrformet.2023.109654>.
19. Demakov Yu.P., Puryaev A.S., Chernykh V.L., Chernykh L.V. Using allometric relationships to assess the phytomass of various tree fractions and model their dynamics. *Vestn. Povolzh. Gos. Tekhnol. Univ. Ser.: Les. Ekol. Prirodopol'z.*, 2015, no. 2 (26), pp. 19–36. (In Russian)
20. Good Practice Guidance Land Use, Land-Use Change and Forestry. IPCC National Greenhouse Gas Inventories Programme. Moscow, IPCC, WMO, 2003. 330 p. (In Russian)
21. Nurgaliev D.K., Selivanovskaya S.Yu., Kozhevnikova M.V., Galitskaya P.Yu. Some challenges and opportunities for Russia and regions in terms of the global decarbonization trend. *Georesursy*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 8–16. <https://doi.org/10.18599/grs.2021.3.2>. (In Russian)
22. Bukoski J.J., Cook-Patton S.C., Melikov C., Ban H., Chen J.L., Goldman E.D., Harris N.L., Potts M.D. Rates and drivers of aboveground carbon accumulation in global monoculture plantation forests. *Nat. Commun.*, 2022, vol. 13, no. 1, art. 4206. <https://doi.org/10.1038/s41467-022-31380-7>.
23. Kalachev V.A., Vais A.A., Anuev E.A., Martynova D.O. Phyto mass accumulation and the carbon potential of modal fir stands determination in the conditions of the Krasnoyarsk-Kansk podtaezhno-forest-steppe region. *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.*, 2020, vol. 548, art. 052016. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/548/5/052016>.

⟨ **Для цитирования:** Зарипов Ш.Х., Тарасова Д.А., Кожевникова М.В., Костерина Е.А. Математическая модель для расчета динамики запасенного углерода в лесном сообществе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Естеств. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 704–723. <https://doi.org/10.26907/2542-064X.2024.4.704-723>. ⟩

⟨ **For citation:** Zaripov Sh.Kh., Tarasova D.A., Kozhevnikova M.V., Kosterina E.A. A mathematical model for estimating carbon storage dynamics of forest communities. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Estestvennye Nauki*, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 704–723. <https://doi.org/10.26907/2542-064X.2024.4.704-723>. (In Russian) ⟩